



(12) **Patentschrift**

(21) Aktenzeichen: **10 2015 016 542.9**
 (22) Anmeldetag: **18.12.2015**
 (43) Offenlegungstag: **22.06.2017**
 (45) Veröffentlichungstag der Patenterteilung: **07.12.2017**

(51) Int Cl.: **H03H 17/04 (2006.01)**
G05B 21/02 (2006.01)

Innerhalb von neun Monaten nach Veröffentlichung der Patenterteilung kann nach § 59 Patentgesetz gegen das Patent Einspruch erhoben werden. Der Einspruch ist schriftlich zu erklären und zu begründen. Innerhalb der Einspruchsfrist ist eine Einspruchsgebühr in Höhe von 200 Euro zu entrichten (§ 6 Patentkostengesetz in Verbindung mit der Anlage zu § 2 Abs. 1 Patentkostengesetz).

(73) Patentinhaber:
Karlsruher Institut für Technologie, 76131 Karlsruhe, DE

(72) Erfinder:
Bleimund, Felix, 76131 Karlsruhe, DE; Rhode, Stephan, 76139 Karlsruhe, DE

(74) Vertreter:
Müller-Boré & Partner Patentanwälte PartG mbB, 80639 München, DE

(54) Bezeichnung: **Rekursiver Signalfilter**

(57) Hauptanspruch: Verfahren zur Rekonstruktion eines Signals (50) aus Messdaten umfassend: Erfassen einer zeitlichen Abfolge von Messdatenpunkten (40);

Vorgabe einer Polynomfunktion der Ordnung $n - 1$ und einen Vergesslichkeitsfaktor λ ;

Bereitstellen eines polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (10) mit einem gleitenden Fenster (D) und einer exponentiellen Gewichtung mit dem Vergesslichkeitsfaktor λ ;

Anpassen der Koeffizienten der Polynomfunktion an die Messdatenpunkte (40) mittels rekursiver Anwendung des polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (10);

Ausgabe der Polynomfunktion mit den angepassten Koeffizienten als ein rekonstruiertes Messsignal (50);

wobei das Bereitstellen des polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (10) umfasst:

Bestimmen einer konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} und Initialisieren des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (10) anhand der bestimmten konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} ,

wobei die konvergierte Kovarianzmatrix \hat{P} nach der Gleichung $\hat{P} = C^{-1}$ bestimmt wird, wobei C die Korrelationsmatrix mit den Elementen $C_{m,q}$, $m, q \in \{0, n - 1\}$ bezeichnet, und

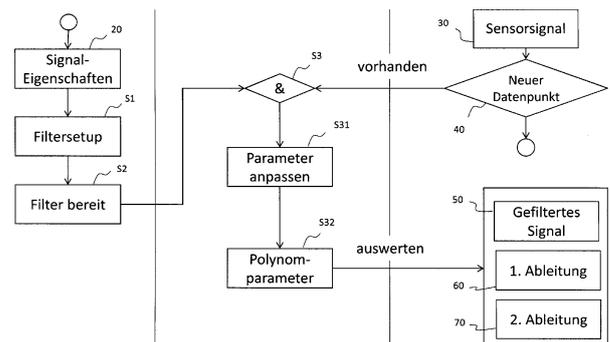
$$C_{m,q} = \sum_{j=0}^{m+q} \binom{m+q}{j} \cdot u_k^{m+q-j} \cdot \delta_t^j \cdot \Lambda_j.$$

$$\sum_{i=0}^{k \rightarrow \infty} (k - i)^j \cdot \lambda^{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} i^j \cdot \lambda^i = \Lambda_j \left(\frac{-1}{\lambda - 1} \right)$$

$$\Lambda_j(\dots) = \prod_1^j \lambda \cdot \frac{d}{d\lambda}(\dots)$$

und wobei

$\delta_t = -\delta_u$ die Verschiebung des Fensters des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters bezeichnet; und δ_t^j den zeitlichen Abstand zwischen zwei Messpunkten potenziert mit j bezeichnet.



Beschreibung

[0001] Die vorliegende Erfindung betrifft ein Verfahren zur Rekonstruktion eines Signals aus Messdaten sowie eine entsprechende Messvorrichtung. Ferner betrifft die vorliegende Erfindung eine Vorrichtung und ein Verfahren zum Regeln und/oder Steuern eines Systems. Einsatzbereiche der Erfindung sind beispielsweise die Signalrekonstruktion, Signalverarbeitung, Signalfilterung, Regelung und Messtechnik.

[0002] Es sind unterschiedliche Methoden bekannt, um ein Signal aus verrauschten Messwerten zu rekonstruieren.

[0003] Die Savitzky Golay Methode (SVG) nutzt Faltungsmatrizen, um ein geglättetes Signal und dessen geglättete Ableitungen an einem vorausgewählten Punkt zu erhalten. Wie im Paper [1] beschrieben, ist dieser vorausgewählte Punkt der Mittelpunkt des Glättungsfensters. Wie bei einer gewichteten Summe von Datenpunktwerten arbeitet die Methode im Glättungsfenster. Das bedeutet, dass ein Zugriff auf die Anzahl der Datenpunkte (l) im Glättungsfenster garantiert sein muss. Es ist folglich erforderlich, l Werte abzuspeichern. Die Gewichte können in einer Tabelle gespeichert oder berechnet werden.

[0004] Das polynomische Kalman-Glättungsfilter (Englisch: Polynomial Kalman Smoother oder PKS) kann als Weiterentwicklung der Savitzky Golay Methode aufgefasst werden. Er nutzt dieselben Polynomfunktionen, um das rauschfreie Signal zu beschreiben. Im Gegensatz zur SVG Methode kann der PKS die Polynomfunktion, wie auch ihre Ableitungen, nicht nur an einem Punkt sondern an mehreren Punkten auswerten und braucht, nicht wie die SVG Zugriff auf alle Datenpunkte im Glättungsfenster, sondern nur auf einen neuen Datenpunkt pro Update (siehe die Publikationen [1],[2] und [17]).

[0005] Das Multi-Dimensional Derivatives Filter ist aus zusammenpassenden Ableitungsfiltren und Tiefpassvorfiltern zusammengestellt. Der Ansatz zur Rekonstruktion des geglätteten Signals ist es, im Vorfilter aus den diskreten Zeitwerten eine kontinuierliche Funktion zu bilden und diese abzuleiten. Das Multi-Dimensional Derivatives Filter kann bei trennbaren Vorfiltern das Problem auf eine Dimension reduzieren. Wie auch der PKS kann das Multidimensional Derivatives Filter nicht nur den Wert der geglätteten Funktion bestimmen, sondern auch deren Ableitungen (siehe die Publikation [3]).

[0006] FIR-Filter können, wie das PKS, als Hoch- oder Tiefpassfilter eingesetzt werden. Sie haben eine endliche Impulsantwort und sind somit stets stabil und verursachen keine Rückkopplungen. Auch sie können die Ableitungen der Funktionen berechnen, allerdings wird der Rechenaufwand bei mehreren Ableitungen extrem hoch. Die Fenstergröße ist im Gegensatz zum PKS fest und die FIR-Filter sind online-fähig. Nachteile sind die aufwendigere Implementierung auf Grund einer größeren Zahl von Koeffizienten bei gleicher Selektivität (siehe die Publikationen [4] und [5]). Ein Vorteil der FIR-Filter gegenüber IIR-Filtern ist, dass sie immer stabil sind.

[0007] IIR-Filter können ebenfalls als Hoch- oder Tiefpassfilter eingesetzt werden. Sie haben eine unendliche Impulsantwort und können somit instabil werden. Ferner werden keine stationären Zustände erreicht. Wie beim PKS ist ihre Fensterlänge variabel und der Rechenaufwand im Allgemeinen gering. Der Vorteil gegenüber FIR-Filtern ist, dass ihre Ordnung niedriger ist. Anwendungsbereich ist wie auch bei FIR-Filtern, die Automatisierungstechnik. Sie haben analoge Gegenstücke (siehe die Publikationen [4] und [5]).

[0008] Der Block-based Rao-Blackwellized Smoother, der mit Integralen arbeitet, ist ein Block-based Particle Smoother mit merklicher Reduzierung der Speicherkapazität für die Partikelinformationen. Dadurch benötigt er nur wenig Speicherplatz. Im Zusammenspiel mit der variablen Fensterlänge, die die Blocklänge widerspiegelt, ermöglicht das eine Block-für-Block (block-by-block) Ausführung der Glättung. Bei einer Blocklänge von l Datenpunkten werden für ein Update l Datenpunkte benötigt. Aus diesem Grund ist dieser Ansatz nicht vollständig online-fähig. Je nach Blockgröße variiert der Speicher- und Rechenaufwand, da immer auf alle Datenpunkte des jeweiligen Blocks zugegriffen werden muss. Ein Anwendungsgebiet dieses Filters ist die Audiosignalverarbeitung (siehe die Publikation [6]).

[0009] Das Kalman Smoother (Kalman-Glättungsfilter) versucht mithilfe von stochastischen Mitteln wie Erwartungswert, Varianz und Kovarianz eine Glättung zu kalkulieren. Es hat einen hohen Speicheraufwand, da zu jedem Zeitpunkt auf alle Datenpunkte zugegriffen werden muss. Die Fensterlänge ist im Gegensatz dazu klein und fest. Dadurch braucht er für ein Update so viele Datenpunkte wie die Fensterlänge beinhaltet. Anwendungsgebiete sind z. B. Navigation und Wettervorhersagen (siehe die Publikation [7]).

[0010] Das Unscented Rauch-Tung-Striebel Filter benutzt ein System aus Vorwärtsfilterung und eine separate, rekursive Rückwärtsglättung, um ein geglättetes Signal zu rekonstruieren. Die Fenstergröße ist fest, wodurch er für ein Update die Anzahl an Messdatenpunkten benötigt, die das Fenster beinhaltet. Es ist nicht onlinefähig und muss zu jedem Zeitpunkt auf alle Datenpunkte zugreifen können, was zu erhöhtem Speicheraufwand und Leistungen führt, die vergleichbar mit einem Unscented Kalman-Filter sind. Allerdings ist es im Gegensatz zu einem Kalman-Filter unabhängig von der Kovarianz. Es wird in Gebieten mit Zustandsraum eingesetzt, wie z. B. Navigation, Luft- und Raumfahrt, Telekommunikation und Audio Signal Verarbeitung (siehe die Publikationen [8] und [9]).

[0011] Das Gleitende Mittelwert Filter ist ein Filter mit endlicher Impulsantwort. Es bildet aus den Werten im jeweiligen Fenster den Mittelwert und gleitet dann weiter. Mit der Fenstergröße kann die Glättung eingestellt werden. Allerdings kann nur der Wert an der jeweiligen Stelle ausgegeben werden und keine Ableitung. Ein Vorteil gegenüber PKS ist, dass sich der Rechenaufwand bei beliebig komplexen Zeitreihen nicht ändert. Nachteilig ist, dass die Fenstergröße fest ist und es nicht onlinefähig ist. Eine weitere Eigenschaft ist die geringe Amplitudentreue, das bedeutet, dass es Ausbrüche stark dämpft. Es findet Verwendung in der medizinischen Bildverarbeitung, da es eine gute Rauschunterdrückung und Stufenantwort liefert, sowie in der Zeitreihenanalyse (siehe die Publikation [10]).

[0012] Das (Adaptive) Weighted Median Filter nimmt eine bestimmte Umgebung eines Punktes und ersetzt alle Punkte darin mit dem Median der Punktmenge. Das Filter wird unter anderem in der Geräuschreduzierung und Bildbearbeitung verwendet. Da die Fensterlänge fest ist und immer nur auf die Datenpunkte des aktuellen Fensters zugegriffen werden muss, ist der Rechenaufwand konstant. Die Amplitudentreue ist noch wesentlich geringer als beim gleitenden Mittelwert Filter, da das (Adaptive) Weighted Median Filter unter Umständen Ausbrüche vollständig ignoriert. Auf Grund seiner Echtzeitfähigkeit ist ein Anwendungsgebiet die Satellitenübertragung von TV-Signalen (siehe die Publikationen [11] und [12]).

[0013] Das Binomial Filter basiert auf Binomen und hat eine feste Fensterlänge. Es wird bei einfach berechenbaren Filtervorgängen benutzt, da es dort sehr schnell und relativ genau ist. Ferner wird es bei Problemen mit großem Rechenaufwand eingesetzt, da es im Vergleich zum SVG Filter zwar weniger genau, aber wesentlich schneller ist (siehe die Publikation [13]).

[0014] Die Patentschrift [14] beschreibt eine rekursive Glättung einer Zeitreihe mit höchster Amplitudentreue, da die maximalen Ausschläge in jedem Fall erhalten bleiben. Es kann genau definiert werden bis zu welcher Ausschlagshöhe eine Spitze erhalten bleiben soll. Die Methode benötigt stets den Zugriff auf alle Datenpunkte, was zu einem hohen Speicherbedarf führt. Jeder Updateschritt erfordert eine komplette Neuberechnung der gesamten Zeitreihe, was zu hohen Rechenzeiten führt. Somit ist das in der Patentschrift [14] beschriebene Verfahren nicht online-fähig.

[0015] Die Patentschrift [15] beschreibt ein Verfahren zur Regelung einer Gasturbine. Das Verfahren generiert gedämpfte Signalwerte aus den Messsignalwerten. Dabei werden die Messsignalwerte einer exponentiellen Glättung mit einem Dämpfungsfaktor unterzogen. Der Dämpfungsfaktor hängt dabei von der Differenz der Messsignalwerte ab. Wenn der zweite gemessene Wert größer (oder gleich) ist als der gedämpfte erste Wert, dann wird ein großer Dämpfungsfaktor gewählt. Das hat einen Anstieg des gedämpften Signales zur Folge. Das Ziel ist ungefährliche kurze Spitzen aus dem Signal zu eliminieren, was zu einer gewünschten geringen Amplitudentreue führt.

[0016] Die Patentschrift [16] beschreibt ein Verfahren und eine Vorrichtung zur automatischen online Analyse von Messreihen. Das Verfahren umfasst eine Glättung der Messkurven mit statistischen Signalmodellen. Die Signalmodelle sind Hidden-Markov-Modelle.

Liste der zitierten Druckschriften:

[0017]

[1] SAVITZKY, Abraham und Marcel JE. GOLAY. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. Analytical Chemistry. American Chemical Society, 1964, 36(8). 1627–1639. DOI: 10.1021/ac60214a047;

[2] MADDEN, Hannibal H. Comments on the Savitzky-Golay convolution method for least-squares-fit smoothing and differentiation of digital data. Analytical Chemistry. American Chemical Society, 1978, 50(9). 1383–1386;

- [3] SIMONCELLI, Eero. Design of Multi-Dimensional Derivatives Filter. First IEEE International Conference on Image Processing, Austin [Texas], 1994-11, 1. 790–793. DOI: 10.1109/ICIP.1994.413423;
- [4] Entwurf von FIR-Filtern. In: Text zur VO und Folien. Wien: Technische Universität Wien, 2010, Kapitel 1;
- [5] WOLFRAM Armin und Michael VOGT. Zeitdiskrete Filteralgorithmen zur Erzeugung zeitlicher Ableitungen. at-Automatisierungstechnik, 2002-09, 50(7). 346–353. DOI: 10.1524/auto.2002.50.7.346;
- [6] FONG William, Simon GODSILL, Arnaud DOUCET and Mike WEST. Monte Carlo Smoothing With Application to Audio Signal Enhancement. IEEE Transactions on Signal Processing. IEEE, 2002-02, 50(2). 438–449. DOI: 10.1109/78.978397;
- [7] MOVELLAN, J. Discrete Time Kalman Filters and Smoothers. San Diego [California]: University of California San Diego, 2011, Smoothers MPLab Tutorials;
- [8] SAERKKA, Simo. Unscented Rauch-Tung-Striebel Smoother. IEEE Transactions on Automatic Control. IEEE, 2008, 53(3). 845–849. DOI: 10.1109/TAC.2008.919531.
- [9] TEREJANU, Gabriel. Crib Sheet: Linear Kalman Smoothing. Buffalo [New York]: University at Buffalo, 2008;
- [10] SCHMEER, Georg. Digitale Signalbearbeitung und statistische Datenanalyse. Regensburg: Universität Regensburg, 2007-03-15, (6). Regensburg: Universität Regensburg;
- [11] LOUPAS T, W. N. MCDICKEN AND P. L. ALLAN. An Adaptive Weighted Median Filter for Speckle Suppression in Medical Ultrasonic Images. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1989, 36(1). 129–135. DOI: 10.1109/31.16577;
- [12] BROWNRIGG, D. R. K. The weighted median filter. Communications of the ACM. New York City: Association for Computing Machinery, 1984-08, 27(8). 807–818. DOI: 10.1145/358198.358222.
- [13] MARCHAND, P. und L. MARMET. Binomial smoothing filter: A way to avoid some pitfalls of least-squares polynomial smoothing. Review of scientific instruments. College Park [Maryland]: American Institute of Physics, 1983, 54(8). 1034–1041. DOI: 10.1063/1.1137498;
- [14] US 2013/0030759 A1;
- [15] US 2013/0325370 A1;
- [16] DE 10123572 C1;
- [17] ROHDE, S.; BLEIMUND F. und GAUTERIN F., Recursive Generalized Total Least Squares with Noise Covariance Estimation, Preprints of the 19th IFAC World Congress, Cape Town, South African, Volume 19, Part 1, pp. 4637–4643; DOI 10.3182/20140824-6-ZA-1003.01568.

[0018] Bei den bekannten Verfahren kann der Verzug nur bei dem Savitzky-Golay-Filter eingestellt werden, eine Prädiktion ist nicht möglich. Ebenfalls kann nur der Savitzky-Golay-Filter analytische Funktionen und damit Ableitungen ohne Diskretisierungseffekte liefern. Einige der Verfahren sind nicht oder nur bedingt online fähig und sehr rechenintensiv.

[0019] Eine Aufgabe der Erfindung ist es, ein verbessertes Verfahren und eine Vorrichtung zur Rekonstruktion eines Signals aus verrauschten Messdaten bereitzustellen, das online-fähig ist und das vorzugsweise schneller und mit einem geringeren Rechenaufwand durchgeführt werden kann.

[0020] Diese und weiteren Aufgaben werden gelöst durch ein Verfahren zur Rekonstruktion eines Signals aus Messdaten nach Anspruch 1, ein Verfahren zum Regeln und/oder Steuern eines Systems nach Anspruch 5, ein Computerprogrammprodukt nach Anspruch 6, eine Messvorrichtung nach Anspruch 7, und eine Vorrichtung zum Regeln und/oder Steuern eines Systems nach Anspruch 11. Bevorzugte Ausführungsformen sind in den abhängigen Ansprüchen definiert.

[0021] Gemäß einem ersten Aspekt der Erfindung wird ein Verfahren zur Rekonstruktion eines Signals aus Messdaten bereitgestellt, insbesondere ein computergestütztes oder computerimplementiertes Verfahren. Das Verfahren umfasst:

Erfassen einer zeitlichen Abfolge von Messdatenpunkten;

Vorgabe einer Polynomfunktion der Ordnung $n - 1$ und einen Vergesslichkeitsfaktor λ ;

Bereitstellen eines polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters mit einem gleitenden Fenster und einer exponentiellen Gewichtung mit dem Vergesslichkeitsfaktor λ ;

Anpassen der Koeffizienten der Polynomfunktion an die Messdatenpunkte mittels rekursiver Anwendung des polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters, und

Ausgabe der Polynomfunktion mit den angepassten Koeffizienten als ein rekonstruiertes Messsignal.

[0022] Das Bereitstellen des polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters umfasst Bestimmen einer konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} und Initialisieren des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters anhand der bestimmten konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} . Die konvergierte Kovarianzmatrix \hat{P} kann nach der

Gleichung $\hat{P} = C^{-1}$ bestimmt werden, wobei C die Korrelationsmatrix mit den Elementen $C_{m,q}$, $m, q \in \{0, n-1\}$ bezeichnet, und

$$C_{m,q} = \sum_{j=0}^{m+q} \binom{m+q}{j} \cdot u_k^{m+q-j} \cdot \delta_t^j \cdot \Lambda_j.$$

$$\sum_{i=0}^{k \rightarrow \infty} (k-i)^j \cdot \lambda^{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} i^j \cdot \lambda^i = \Lambda_j \left(\frac{-1}{\lambda-1} \right)$$

$$\Lambda_j(\dots) = \prod_1^j \lambda \cdot \frac{d}{d\lambda}(\dots)$$

[0023] In den obigen Formeln bezeichnet:

$\delta_t = -\delta_u$ die Verschiebung des Fensters des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters; und δ_t^j den zeitlichen Abstand zwischen zwei Messpunkten potenziert mit j . Die „i“ und „j“ sind Indexe.

[0024] Die Messdatenpunkte können Messwerte eines Sensors umfassen. Es ist auch möglich, dass jeder Messdatenpunkt einem Vektor von Messwerten unterschiedlicher Sensoren entspricht. Das Anpassen der Koeffizienten der Polynomfunktion an die (verrauschten) Messdaten bzw. Messdatenpunkten stellt ein Minimierungsproblem dar, das mit einem rekursiven Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter gelöst werden kann. Das Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter wird rekursiv für jeden neuen Messdatenpunkt angewandt, um die Koeffizienten der Polynomfunktion zu bestimmen. Um die Anzahl der Ausführungen des Kalman-Filters oder des Kalman-Glättungsfilters, insbesondere bei langen Zeitreihen von Messdaten zu reduzieren, kann ein Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter mit exponentieller Gewichtung der Messdatenpunkten eingesetzt werden. In diesem Fall werden die Messdatenpunkten nicht gleich, sondern exponentiell mit der Zeit gewichtet. Die Gewichtung hängt von einem Faktor ab, der nachfolgend als Vergesslichkeitsfaktor λ bezeichnet wird. Wenn jedoch die Zeit t sehr groß ist und gegen Unendlichkeit geht ($t \rightarrow \infty$), wie dies z. B. bei online-Anwendungen der Fall ist, ist auch dieser Ansatz nicht praktikabel, da die Werte für $u_{k,q}|q > 0$ unendlich sind. Hier bezeichnet k den Schritindex, wobei bei $t \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, und q den Index des Inputvektors u (das erste Element von u ist immer gleich 1). Aus diesem Grund ist dieser Ansatz für online-Anwendungen nicht praktikabel.

[0025] Um die online-Fähigkeit des Rekonstruktionsverfahrens zu verbessern, wird vorgeschlagen, eine exponentielle Gewichtung der Daten- bzw. Messpunkten mit einer Verschiebung der Polynomfunktion zu kombinieren. Dies kann mit einem Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter mit exponentieller Gewichtung und einem gleitenden Fenster realisiert werden, bei welchem das Fenster, in welchem die Polynomfunktion betrachtet bzw. ausgewertet wird, verschoben wird. Das Fenster wird in einem t -basierten Koordinatensystem in jedem Zeitschritt um $\delta_t = -\delta_u$ verschoben. Durch diesen kombinierten Ansatz kann das Problem der unendlichen Werte gelöst und gleichzeitig die Anzahl der Abrufe des Kalman-Filters reduziert werden.

[0026] Ferner wird vorgeschlagen, das Kalman-Filter oder das Kalman-Glättungsfilter anhand einer zuvor berechneten konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} zu initialisieren. Die konvergierte Kovarianzmatrix \hat{P} kann vorab anhand von Parametern des Filters selbst (Vergesslichkeitsfaktor, Ordnung der Polynomfunktion) bestimmt werden, so dass eine Berücksichtigung von Messdaten nicht notwendig ist. Mit der vorgeschlagenen Vorgehensweise kann das polynomische Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter von einem eingeschwungenen bzw. konvergierten Zustand starten. Dadurch können die aufwendigsten Rechenschritte eines konventionellen Kalman-Filters ausgelassen und das Verfahren erheblich beschleunigt werden. Ferner kann das ungewünschte Aufschwingen der Ausgaben zu Beginn der Laufzeit vermieden werden.

[0027] Das Gain K des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters kann konstant bleiben. Das Gain kann auf Basis der konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} berechnet werden, z. B. nach der Gleichung:

$$K_k = \hat{P}'_k \cdot \mathbf{u}_k^T \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \hat{P}'_k \cdot \mathbf{u}_k^T + R_k)^{-1}, \text{ wobei}$$

$$\hat{P}'_k = \hat{P}, R_k = \lambda \text{ und } k \rightarrow \infty.$$

[0028] Das vorgeschlagene Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter mit konstantem Gain ist sehr schnell und benötigt wenig Speicherplatz. Die geringe Rechenzeitanforderung führt zu geringen Latenzzeiten des Rekonstruktionsverfahrens. Überraschenderweise ist die Genauigkeit des Rekonstruktionsverfahrens dennoch sehr hoch.

[0029] Die Parameter des Kalman-Filters oder des Kalman-Glättungsfilters, wie z. B. die Fensterlänge, der Vergesslichkeitsfaktor und/oder der Verzug, können anwendungsspezifisch gewählt werden. Der Vergesslichkeitsfaktor λ kann im Bereich $0 < \lambda < 1$ liegen. Der Vergesslichkeitsfaktor λ kann insbesondere in Abhängigkeit von der erwarteten Signalfrequenz und/oder der Abtastrate gewählt werden. Die Fensterlänge ergibt sich dann automatisch aus der Wahl des Vergesslichkeitsfaktors λ . Der Verzug kann anwendungsspezifisch gewählt werden. Der Verzug kann z. B. 0 (kein Glätten, nur Filtern) oder unterschiedlich von Null sein (z. B. beim Glätten). Der Verzug kann auch negative Werte annehmen. Vorzugsweise ist der Verzug nicht größer als die halbe Fensterlänge.

[0030] Das Verfahren kann ferner weitere Signalverarbeitungsschritte umfassen, z. B. ein Ermitteln der lokalen Ableitungen der angepassten Polynomfunktion. Da eine rekursive Anpassung der Polynomparameter an die Datenpunkte stattfindet, können die Ableitungen des rekonstruierten Signals schnell und ohne Diskretisierungseffekte gebildet werden. Das rekonstruierte Signal und gegebenenfalls die Ableitungen können in einem Regelkreis verwendet werden.

[0031] Gemäß einem zweiten Aspekt der Erfindung wird ein Verfahren zum Regeln- und/oder Steuern eines Systems bereitgestellt. Das Verfahren umfasst die Schritte:
Erfassen einer zeitlichen Abfolge von Messdatenpunkten;
Rekonstruktion eines Signals aus den erfassten Messdaten bzw. Messdatenpunkten nach dem Verfahren gemäß dem ersten Aspekt;
Regeln und/oder Steuern des Systems anhand des rekonstruierten Signals.

[0032] Die obigen Schritte können rekursiv durchgeführt werden. Das Verfahren zum Regeln- und/oder Steuern eines Systems gemäß dem zweiten Aspekt ist schnell und weist aufgrund der geringen Rechenzeitanforderung des vorgeschlagenen Verfahrens zur Rekonstruktion eines Signals aus den Messdaten geringe Latenzzeiten auf. Da die Ableitungen ohne Diskretisierungseffekte in jedem Punkt ermittelt werden können, können diese als zusätzliche Zustände in das Regeln und/oder Steuern des Systems eingehen. Dies führt zur einen Stabilisierung der Regelung und/oder Steuerung.

[0033] Das Verfahren gemäß dem ersten oder dem zweiten Aspekt der Erfindung kann mittels eines geeignet konfigurierten bzw. programmierten Computers oder Computersystems oder spezialisierter Hardware durchgeführt werden.

[0034] Gemäß einem dritten Aspekt der Erfindung wird ein Computerprogrammprodukt bereitgestellt, welches ausgelegt ist, wenn auf einen Computer geladen und ausgeführt, ein Verfahren nach einem der vorangegangenen Aspekte durchzuführen. Das Computerprogrammprodukt kann z. B. in den internen Speicher eines Computers, eines Mikrokontrollers oder eines anderen geeigneten Computersystems geladen werden und Softwarecodemodule bzw. Anweisungen umfassen, mit denen die Schritte der Verfahren gemäß den obigen Aspekten der Erfindung durchgeführt werden können. Das Computerprogrammprodukt kann auf einem maschinell lesbaren Speichermedium gespeichert werden.

[0035] Gemäß einem weiteren Aspekt der Erfindung wird eine Messvorrichtung vorgeschlagen, die ausgelegt ist, das Verfahren nach einem der zuvor beschriebenen Aspekte durchzuführen. Die Vorrichtung umfasst:
zumindest einen Sensor zum Erfassen einer zeitlichen Abfolge von Messdatenpunkten;
Speichermittel zum Speichern eines Vergesslichkeitsfaktors λ und die Koeffizienten einer Polynomfunktion der Ordnung $n - 1$;
Berechnungsmittel zum Anpassen der Koeffizienten der Polynomfunktion an die Messdatenpunkte mittels rekursiver Anwendung eines polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters mit einem gleitenden Fenster und einer exponentiellen Gewichtung mit dem Vergesslichkeitsfaktor λ ; und
Ausgabemittel zur Ausgabe der Polynomfunktion mit den angepassten Koeffizienten als ein rekonstruiertes Messsignal.

[0036] Die Messvorrichtung umfasst ferner Initialisierungsmittel zum Bestimmen einer konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} und zum Initialisieren des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters anhand der bestimmten konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} . Die Bestimmung der konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} erfolgt, wie oben in

Zusammenhang mit dem ersten Aspekt beschrieben. Das Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter kann ein konstantes Gain K aufweisen, das wie oben beschrieben berechnet werden kann. Die Parameter des Kalman-Filters oder des Kalman-Glättungsfilters (wie z. B. Fensterlänge, Vergesslichkeitsfaktor, Verzug, etc.) können wie oben beschrieben anwendungsspezifisch festgelegt werden.

[0037] Die Messvorrichtung kann ferner weitere Komponente oder Module umfassen, wie z. B. weitere Signalverarbeitungsmodule oder -mittel. Beispielsweise kann die Messvorrichtung ferner umfassend Differenzierungsmittel zum Berechnen der lokalen Ableitungen der angepassten Polynomfunktion umfassen.

[0038] Die Messvorrichtung kann einen oder mehreren Sensoren für unterschiedliche physikalische Größen umfassen, wie z. B. für Positionssensoren, Geschwindigkeitssensoren, usw. Grundsätzlich bestehen keine Beschränkungen bezüglich der Art der gemessenen physikalischen Größen. Die Ausgabemittel können z. B. eine oder mehrere Anzeigeeinheiten und/oder elektronische Schnittstellen umfassen, mit den das rekonstruierte Signal an weitere Module oder Vorrichtungen übermittelt werden kann. Die Speichermittel, Berechnungsmittel, Initialisierungsmittel, Differenzierungsmittel, Signalverarbeitungsmittel und/oder andere der oben beschriebenen Komponenten können mittels geeignet konfigurierter bzw. programmierter Computern, spezialisierter Hardware und/oder Computernetze oder Computersysteme implementiert werden. Alle genannten Komponenten können in Signalverbindung miteinander und mit weiteren Komponenten stehen.

[0039] Gemäß einem weiteren Aspekt der Erfindung wird eine Vorrichtung zum Regeln- und/oder Steuern eines Systems vorgeschlagen, welches eine Messvorrichtung gemäß einem der oben beschriebenen Aspekte umfasst.

[0040] Die technischen Einsatzgebiete der vorliegenden Erfindung umfassen die Signalrekonstruktion, Signalverarbeitung, Signalfilterung, Regelung, Messtechnik. Das Verfahren ist online-fähig und zeichnet sich insbesondere durch einen geringeren Speicher- und Rechenbedarf und durch eine einfache Realisierungsmöglichkeit auf Hardware aus. Insbesondere ist es mit dem erfindungsgemäßen Verfahren möglich, das originale Signal aus einem verrauschtem Messsignal zu rekonstruieren, wobei die Rekonstruktion ohne Verzug (Filtern) oder mit bekanntem Verzug (Glätten) erfolgen kann.

[0041] Die Erfindung wird nachstehend beispielhaft anhand von Ausführungsbeispielen und den Figuren näher erläutert. Es zeigen:

[0042] Fig. 1A ein beispielhaftes Anpassen einer Polynomfunktion an die diskreten Daten- bzw. Messpunkten eines Messsignals;

[0043] Fig. 1B zwei beispielhafte Gewichtungsfunktionen: eine rechteckige und eine exponentielle Gewichtungsfunktion;

[0044] Fig. 2 eine beispielhafte Verschiebung einer Funktion;

[0045] Fig. 3 das Block-Diagramm eines beispielhaften Filters;

[0046] Fig. 4 das Ablaufdiagramm eines beispielhaften Verfahrens;

[0047] Fig. 5 eine Anwendung eines beispielhaften Filters in einem Regelkreis;

[0048] Fig. 6 eine beispielhafte Anwendungsanordnung für ein BRF Filter.

[0049] Fig. 7 beispielhafte Signale einschließlich eines Messsignals und eines rekonstruierten Signals.

[0050] In den Figuren sind einander entsprechende oder funktionsähnliche Bauteile mit gleichen Bezugszeichen versehen.

[0051] Messsignale sind aufgrund von unterschiedlichen Fehlern in der Regel verrauscht. Es sind, wie oben dargelegt, unterschiedliche Methoden bekannt, um ein Signal aus verrauschten Messwerten zu rekonstruieren. Nachfolgend werden beispielhafte Verfahren auf Basis von Kalman-Filtern oder Kalman-Glättungsfiltern (PKS) beschrieben.

[0052] Das Messsignal kann eine zeitliche Abfolge von Daten- bzw. Messpunkten $\{d_k\}$ bzw. eine Messreihe umfassen, wobei $k = 0, 1, 2, \dots$. Jeder Daten- bzw. Messpunkt kann einen Vektor von Messwerten entsprechen. Den Daten- bzw. Messpunkten kann eine Polynomfunktion der Ordnung $n - 1$ angepasst werden, die mathematisch wie folgt dargestellt werden kann:

$$\hat{d}(u, \hat{x}) = \hat{x}_1 u^0 + \hat{x}_2 u^1 + \hat{x}_3 u^2 + \dots + \hat{x}_n u^{n-1} \quad (1)$$

$$\hat{d}(u, \hat{x}) = u \cdot \hat{x} \quad (2)$$

[0053] In den obigen Formeln bezeichnet:

$$u = (u^0, u^1, u^2, \dots, u^{n-1})$$

den Eingabe- bzw. Inputvektor, welche die Potenzen der Eingabe- bzw. Inputvariable (u) enthält; und

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n)^T$$

den geschätzten Zustandsvektor, der die Koeffizienten der Polynomfunktion umfasst.

[0054] Die angepasste Polynomfunktion kann das rekonstruierte Signal darstellen bzw. beschreiben. Das rekonstruierte Signal kann anschließend weiteren Filter- oder anderen Operationen (wie z. B. Ableitungsbestimmung) unterzogen werden.

[0055] Fig. 1A zeigt ein beispielhaftes Anpassen einer Polynomfunktion an die diskreten Messdatenpunkten eines Messsignals, die sich innerhalb eines Fensters D befinden. Das Fenster D weist eine obere Grenze u_{filter} und eine untere Grenze u_{min} auf und umfasst l Daten- bzw. Messpunkte der aufgezeichneten Messreihe ($d \in \{d_{k-1}, d_k\}$). Das Fenster kann, wie nachfolgend beschrieben, diskret um den Wert δ_u verschoben werden (gleitendes Fenster), wobei es gilt: $\sum_i \delta_{u,i} = u_{\text{filter}} - u_{\text{min}} \equiv D$ und $d_k = d_{u_{\text{filter}}} \wedge d_{k-1} = d_{u_{\text{min}}}$ | $t = t_k$. Der zeitliche Abstand zwischen dem Zeitpunkt, der einem zu evaluierenden Punkt u_{eval} entspricht und dem Zeitpunkt t_k wird als Verzug (Englisch: delay) bezeichnet.

[0056] Die Anpassung einer Polynomfunktion an l Daten- bzw. Messpunkte eines Messsignals kann als lineares Filterproblem betrachtet werden. Wenn eine rechteckige Gewichtungsfunktion verwendet wird, bei der jeder Daten- bzw. Messpunkt gleich gewichtet wird (siehe Fig. 1B), kann das Minimierungsproblem wie folgt beschrieben werden:

$$\hat{x} = \arg \min_x \sum_{i=0}^l (d_{k-i} - u_{l-i} \cdot x)^2, \quad (3)$$

wobei die Polynomfunktion in einem Bereich bzw. Fenster D mit Unter- und Obergrenzen u_{min} und u_{filter} betrachtet wird,

l die Anzahl der Daten- bzw. Messpunkten innerhalb des Fensters D ist;

$u \in \{u_{\text{min}}, u_{\text{filter}}\}$ und

$d \in \{d_{k-l}, d_k\}$ die Daten- bzw. Messpunkten der Messreihe bezeichnet.

[0057] Das Minimierungsproblem kann mittels eines rekursiven Kalman-Filters gelöst werden. Für eine Reihe von l Daten- bzw. Messpunkten muss das Kalman-Filter ungefähr l Mal für jeden Daten- bzw. Messpunkt abgerufen bzw. angewandt werden. Wird das Signal (d) über die Zeit (t) | $t \in \{t_1, t_k\}$ aufgenommen, muss das Kalman-Filter

$$k \cdot l - \frac{l^2 - l}{2}$$

Mal abgerufen bzw. angewandt werden.

[0058] Die Anzahl der Abrufe des Kalman-Filters kann durch eine exponentielle Gewichtung der Messdatenpunkten auf k reduziert werden (siehe **Fig. 1B**). Wird eine exponentielle Gewichtung mit einem Vergesslichkeitsfaktor λ angewandt, kann das Minimierungsproblem wie folgt beschrieben werden:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} (d_i - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x})^2 \quad (4)$$

[0059] Dies entspricht der folgenden gewichteten kleinsten Quadrate Darstellung (Weighted Least Squares oder WLS):

$$W_{i,j} = \begin{cases} \lambda^{k-i} & \forall j = i \mid i \in \{0, k\} \\ 0 & \forall j \neq i, \end{cases}$$

$$U^T W U \cdot \hat{\mathbf{x}} = U^T W \mathbf{d} \mid U_{i,:} = \mathbf{u}_i \quad (5)$$

[0060] Dieses Minimierungsproblem kann mittels eines rekursiven Kalman-Filters bzw. eines Kalman-Glättungsfilters in Kombination mit einem kurzzeitigen Speicher, der durch den Vergesslichkeitsfaktor λ implementiert ist, gelöst werden. Bei $l = \frac{1}{1-\lambda}$ werden alle Datenpunkten außerhalb des Fensters D mit weniger als $w = 1/e$ gewichtet. Für online-Anwendungen geht die Zeit t jedoch zur Unendlichkeit ($t \rightarrow \infty$), so dass der Schritindex k ebenfalls zur Unendlichkeit ($k \rightarrow \infty$) tendiert. Dies führt zu unendlichen Werten für $u_{k,q} | q > 0$, wobei q den Index des Inputvektors \mathbf{u} bezeichnet (vgl. z. B. Formel (2) und die dazugehörige Beschreibung; das erste Element von \mathbf{u} ist gleich 1). Aus diesem Grund ist dieser Ansatz für online-Anwendungen nicht praktikabel.

[0061] Gemäß einem Aspekt der Erfindung wird vorgeschlagen, die Anpassung einer Polynomfunktion mit exponentieller Gewichtung mit einer Verschiebung der Polynomfunktion zu kombinieren, um das Problem der unendlichen Werte zu lösen und gleichzeitig die Anzahl der Abrufe des Kalman-Filters zu reduzieren. Dies kann mit dem nachfolgend beschriebenen Kalman-Filter bzw. Kalman-Glättungsfilter mit gleitendem Fenster und exponentieller Gewichtung erfolgen.

[0062] Grundsätzlich kann jede Funktion entlang der Dimension des Inputs bzw. der Eingabe durch eine Substitution der Input- bzw. Eingangsvariable u mit $u + \delta_u$ verschoben werden. Eine positive Verschiebung um einen Faktor δ_u verschiebt die Funktion in Richtung der kleineren Werte und eine negative Verschiebung in Richtung der größeren Werte, wie in **Fig. 2** gezeigt. Angewandt auf eine Polynomfunktion kann die Verschiebung um den Faktor δ_u wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{x}' = \mathcal{A}_{\delta_u} \cdot \mathbf{x} \quad (6)$$

[0063] In der Formel (6) bezeichnet \mathbf{x}' die Koeffizienten der verschobenen Funktion und \mathcal{A}_{δ_u} die Verschiebungsmatrix.

[0064] Beispielsweise gilt für eine Polynomfunktion der dritten Ordnung, die um den Faktor δ_u verschoben ist:

$$\hat{d}' = (u + \delta_u)^0 \hat{x}_1 + (u + \delta_u)^1 \hat{x}_2 + (u + \delta_u)^2 \hat{x}_3 + (u + \delta_u)^3 \hat{x}_4 \quad (7)$$

[0065] Die Gleichung (7) kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \hat{d}' = & \hat{x}_1 + \delta_u \hat{x}_2 + \delta_u^2 \hat{x}_3 + \delta_u^3 \hat{x}_4 \\ & + u \hat{x}_2 + 2\delta_u u \hat{x}_3 + 3\delta_u^2 u \hat{x}_4 \\ & + u^2 \hat{x}_3 + 3\delta_u u^2 \hat{x}_4 \\ & + u^3 \hat{x}_4 \end{aligned} \quad (8)$$

[0066] Die Verschiebungsmatrix kann dann wie folgt berechnet werden:

$$\mathcal{A}_{\delta_u} = \begin{bmatrix} 1 & 1\delta_u^1 & 1\delta_u^2 & 1\delta_u^3 \\ 0 & 1 & 2\delta_u^1 & 3\delta_u^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3\delta_u^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

[0067] Für die Verschiebung einer beliebigen Polynomfunktion ist die Verschiebungsmatrix

$$\mathcal{A}_{\delta_u} \in$$

$$\mathbb{R}^{n \times n}$$

eine obere Dreiecksmatrix, welche die binomialen Koeffizienten $\binom{n}{i}$ multipliziert durch die entsprechenden Potenzen der Verschiebung δ_u umfasst:

$$\mathcal{A}_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{j-i} \cdot \delta_u^{j-i} & \forall j \geq i \mid i, j \in \{1, n\} \\ 0 & \forall j < i, \end{cases} \quad (10)$$

[0068] Der Wert in einem bestimmten Punkt u der verschobenen Polynomfunktion kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \hat{d}' &= \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{x}}' \\ \hat{d}' &= \mathbf{u} \cdot \mathcal{A}_{\delta_u} \cdot \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (11)$$

[0069] Mit

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} \cdot \mathcal{A}_{\delta_u}$$

kann die verschobene Polynomfunktion erhalten werden als das Matrizenprodukt des verschobenen Inputvektors und dem unveränderten Satz von Parametern der Polynomfunktion:

$$\hat{d}' = \mathbf{u}' \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (12)$$

[0070] Bei einem polynomischen Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter kann für die Inputvariable u das Prinzip der Verschiebung einer Polynomfunktion mit einer exponentiellen Gewichtung kombiniert werden. Zusätzlich zum zeitbasierten Koordinatensystem (d. h. t -basierten Koordinatensystem) kann ein neues u -basiertes Koordinatensystem eingeführt werden (siehe **Fig. 1A**). Die Polynomfunktion ist definiert im u -basierten Koordinatensystem, die erfassten Daten bzw. Messdaten sind entlang der t -Achse und der u -Achse aufgetragen. Die beiden Koordinatensysteme werden durch die folgende Bedingung verbunden:

$$d_k = d_{u_filter} \quad (14)$$

[0071] Mit dieser Bedingung verschiebt sich der Bereich in dem die Polynomfunktion betrachtet wird bzw. das Fenster im t -basierten Koordinatensystem um die Verschiebung δ_u in jedem Zeitschritt. Mit dieser Verschiebung ist eine Verschiebung des u -Koordinatensystems verbunden, was zur einen Phasenverschiebung zwischen der Polynomfunktion und den erfassten Messdatenpunkten führt. Um diese Phasenverschiebung zu kompensieren und das Verhältnis zwischen den Messpunkten und der Polynomfunktion beizubehalten, wird eine Verschiebung des betrachteten Bereichs bzw. des Fensters D vorgenommen. Das bedeutet, dass der betrachtete Bereich, in dem die Polynomfunktion ausgewertet wird bzw. das betrachtete Fenster entlang der t -Achse verschoben wird und die Polynomfunktion an der gleichen Stelle im t -basierten Koordinatensystem verbleibt (vergleiche **Fig. 2** und **Fig. 1A**).

[0072] Einer Distanz δ_u^i von der Obergrenze des Fensters u_{filter} bis zu einem Punkt u_i entspricht eine Verschiebungsmatrix $\mathcal{A}_{\delta_u^i}$ und es gilt

$$u_i = u_{\text{filter}} \cdot \mathcal{A}_{\delta_u^i}.$$

In diesem Fall kann das Minimierungsproblem aus der Gleichung (5) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\hat{x} = \arg \min_x \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} (d_i - u_{\text{filter}} \cdot \mathcal{A}_{\delta_u^i} \cdot x)^2 \quad (15)$$

[0073] In der obigen Formel bezeichnen:

δ_u^i die Distanz von der Obergrenze des Fensters u_{filter} bis u_i ;
 $\mathcal{A}_{\delta_u^i}$ die Verschiebungsmatrix bei einer Verschiebung δ_u^i ; und

$$u_i = u_{\text{filter}} \cdot \mathcal{A}_{\delta_u^i}.$$

[0074] Für $u_0 = u_{\text{filter}}$ gilt:

$$u_{\text{filter}} \cdot \mathcal{A}_{\delta_u^i} = u_{\text{filter}} \cdot \prod_1^{k-i} \mathcal{A}_{\delta_u} \quad (16)$$

da eine Verschiebung über die gesamte Distanz $(k-i)$ Verschiebungen der Elementardistanz δ_u zwischen zwei nacheinander folgenden Messdatenpunkten gleicht.

[0075] Das Minimierungsproblem kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\hat{x} = \arg \min_x \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} (d_i - u_{\text{filter}} \cdot \prod_1^{k-i} \mathcal{A}_{\delta_u} \cdot x)^2 \quad (17)$$

[0076] Wenn die Gleichheit der Verschiebung des Inputvektors und der polynomischen Parameter nach Gleichungen (11) und (12) berücksichtigt wird, kann das folgende Zustandsmodell für das vorgeschlagene polynomische Kalman-Filter bzw. Glättungsfilter mit exponentiellen Gewichtung erhalten werden:

$$\begin{aligned} x_k &= \mathcal{A}_{\delta_u} \cdot x_{k-1} \\ d_k &= u_{\text{filter}} \cdot x_k + \nu_k \end{aligned} \quad (18)$$

[0077] In diesem Modell ist die Zeitaktualisierung (das Zeitupdate) ohne Rauschen modelliert und die Messung mit dem Rauschen v . Es ist möglich, das Zustandsmodell zu erweitern, um auch bei dem Zeitupdate Rauschen zu berücksichtigen.

[0078] Das vorgeschlagene polynomische Kalman-Filter bzw. Kalman-Glättungsfilter mit exponentieller Gewichtung und gleitendem Fenster kann zwei Phasen aufweisen: die Filterphase und die Auswertungsphase. Nachfolgend ist eine beispielhafte Sequenz von Operationen, die für jeden Schritt der Filteroperation, d. h. für jeden neuen Daten- bzw. Messpunkt durchgeführt werden (Algorithmus 1):

Algorithmus 1:

Input/Eingang: $\hat{x}_k, \hat{P}_k, R_k, u_k, d_k$

Zeitaktualisierung:

$$\begin{aligned} 1 \quad \hat{x}'_k &= \mathcal{A}_k \cdot \hat{x}_k \\ 2 \quad \hat{P}'_k &= \mathcal{A}_k \cdot \hat{P}_k \cdot \mathcal{A}_k^T \end{aligned} \quad (19)$$

Messwertaktualisierung bzw. -korrektur:

$$\begin{aligned}
3 \quad K_k &= \hat{P}'_k \cdot \mathbf{u}_k^\top \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \hat{P}'_k \cdot \mathbf{u}_k^\top + R_k)^{-1} \\
4 \quad \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}'_k + K_k \cdot (d_k - \mathbf{u}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}'_k) \\
5 \quad \hat{P}_{k+1} &= 1/R_k \cdot (I - K_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \hat{P}'_k
\end{aligned} \tag{20}$$

Output/Ausgang: $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \hat{P}_{k+1}$

[0079] Während der Filterphase wird die Polynomfunktion zuerst verschoben und die Parameter der Polynomfunktion anhand der Information von dem neuen Daten- bzw. Messpunkt neu berechnet. Für die Verschiebung („Zeitaktualisierung“ des Algorithmus 1) wird die Verschiebungsmatrix \mathcal{A}_{δ_u} und dementsprechend δ_u und n (die Anzahl der Koeffizienten der Polynomfunktion) benötigt. Für die Messwertaktualisierung des Algorithmus 1 werden der Vergesslichkeitsfaktor λ und $\mathbf{u}_{\text{filter}}$ benötigt. Das komplette Gerüst des Kalman-Filters kann z. B. wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\
\hat{P}_k &= \hat{P}_{k-1} \\
R_k &= \lambda = 1 - (1/l) \\
\mathcal{A}_k &= \mathcal{A}_{\delta_u} \\
\mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_{\text{filter}} \\
d_k &= d_t \quad | \quad t = t_k
\end{aligned} \tag{21}$$

[0080] In jedem Schritt werden die Input- bzw. Eingangsgrößen $\hat{\mathbf{x}}_k$ und \hat{P}_k gleich den entsprechenden Output- bzw. Ausgangsgrößen aus dem vorherigen Schritt gesetzt. Für den ersten Filterschritt kann $\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}_0$ und $P_{k-1} = P_0$ gesetzt werden. So kann $\mathbf{x}_0 = 0$ (0-Vektor mit n -Einträgen) sein. Die P_0 kann, wie nachfolgend erläutert, vorab berechnet werden, so dass das Filter bereits in einem eingeschwungenen Zustand gestartet wird. $\mathbf{u}_{\text{filter}}$ definiert die Obergrenze des gleitenden Fensters. Die Untergrenze des gleitenden Fensters ist definiert durch λ nach der Gleichung $l = \frac{1}{1-\lambda}$.

[0081] Für die Auswertungsphase der Signalextraktion wird ein Punkt \mathbf{u}_{eval} gewählt, in dem die angepasste Polynomfunktion ausgewertet wird. In der Regel liegt der Punkt \mathbf{u}_{eval} innerhalb des Fensters D . Der geschätzte bzw. ausgewertete Signalwert in diesem Punkt kann nach der folgenden Gleichung berechnet werden:

$$\hat{d}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}_{\text{eval}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \tag{22}$$

[0082] Die Distanz bzw. der Abstand zwischen dem Punkt \mathbf{u}_{eval} und dem Punkt $\mathbf{u}_{\text{filter}}$ gibt den Verzug des Filters an (siehe z. B. **Fig. 1**). Für $\mathbf{u}_{\text{eval}} = 5,5$, $\mathbf{u}_{\text{filter}} = 10$ und $[u] = [s]$ ist der Verzug z. B. 4,5 Sekunden. Die Rekonstruktion kann auch ohne Verzug (Filtern) oder mit einem anderen Verzug erfolgen.

[0083] Eine bevorzugte Variante des oben beschriebenen polynomischen Kalman-Filters bzw. Kalman-Glättungsfilters (PKS) ist das nachstehend beschriebene Kalman-Filter bzw. Kalman-Glättungsfilter mit einem konstanten Gain K . Es wurde festgestellt, dass für eine konstante Verschiebung δ_u und $\mathbf{u}_{\text{filter}}$ die Matrix \hat{P} zu einer Grenze konvergiert, die nur abhängig von δ_u und $\mathbf{u}_{\text{filter}}$ ist. Somit konvergiert auch das Gain K . Es ist somit möglich, ein konstantes Gain K zu bestimmen, ohne dass dafür Daten bzw. Messdaten notwendig sind. Dadurch entfallen die Bestimmung der geschätzten Kovarianzmatrix \hat{P} und des Kalman Gains K . Versuche haben ergeben, dass durch das Weglassen der entsprechenden Schritte im Algorithmus 1 die Genauigkeit des Verfahrens nicht wesentlich beeinträchtigt wird. Andererseits werden die Anzahl der Rechenoperationen und benötigte Rechenleistung wesentlich reduziert, so dass das Verfahren wesentlich schneller ist. Das polynomische Kalman-Glättungsfilter mit konstantem Gain wird nachfolgend Bleimund-Rhode Filter (BRF) genannt.

[0084] Nachfolgend ist eine beispielhafte Sequenz von Operationen, die für jeden Schritt der Filteroperation des BRF Filters, d. h. für jeden neuen Daten- bzw. Messpunkt durchgeführt werden (Algorithmus 2):

Algorithmus 2:

Input/Eingang: $\hat{\mathbf{x}}_k, \mathcal{A}_{\delta_u}, K, \mathbf{u}_{filter}, \mathbf{u}_{eval}, d_k$

Filterschritt

$$\begin{aligned} 1 \quad \hat{\mathbf{x}}'_k &= \mathcal{A}_{\delta_u} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k \\ 2 \quad \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}'_k + K \cdot (d_k - \mathbf{u}_{filter} \cdot \hat{\mathbf{x}}'_k) \end{aligned} \quad (23)$$

Auswertungsschritt:

$$\hat{d}_{eval,k} = \mathbf{u}_{eval} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \quad (24)$$

Output/Ausgang:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \hat{d}_{eval,k} \quad (25)$$

[0085] Eine Möglichkeit, die konvergierte \hat{P} und somit das Gain K zu ermitteln ist es, \hat{P} solange zu aktualisieren, bis \hat{P} konvergiert. Ein Nachteil dieser Vorgehensweise ist es, dass diese eine unbekannte Anzahl von Aktualisierungen erfordert und dass es notwendig ist, in jedem Schritt die Differenz zum früheren Wert der \hat{P} zu überprüfen, um festzustellen, ob der konvergierte Wert der \hat{P} erreicht ist. Ferner ist es notwendig, Kriterien für eine ausreichend kleine Differenz aufzustellen.

[0086] Es wird daher vorgeschlagen, die konvergierte Kovarianzmatrix \hat{P} vorab anhand von Parametern des Filters selbst (wie z. B. Vergesslichkeitsfaktor und Ordnung der Polynomfunktion) zu bestimmen und das Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter anhand der bestimmten Kovarianzmatrix \hat{P} zu initialisieren bzw. zu starten. Eine Berücksichtigung von Messdaten ist für diese Berechnung nicht notwendig.

[0087] Für die Berechnung der Kovarianzmatrix kann der folgende Zusammenhang zwischen der Korrelationsmatrix C und der Kovarianzmatrix P zu verwenden werden:

$$C^{-1} = P \quad (26)$$

[0088] Da ein Minimierungsproblem für die exponentielle Gewichtung gelöst werden soll (siehe Gleichung 4) gilt für die gewichtete Korrelationsmatrix mit W aus der Gleichung (5):

$$C = U^T W U \quad | \quad U_{k,:} = \mathbf{u}_k \wedge k \rightarrow \infty. \quad (27)$$

[0089] Überraschenderweise hat sich herausgestellt, dass die Elemente $C_{m,q}$ der Matrix C Muster aufweisen, die bekannten Reihenentwicklungen entsprechen. Es gilt insbesondere:

$$\begin{aligned} C_{m,q} &= \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \cdot u_i^{m+q} \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \cdot (u_k + (k-i)\delta_t)^{m+q} \end{aligned} \quad (28)$$

wobei

 $m, q \in \{0, n-1\}$ und $\delta_t = -\delta_u$.

[0090] Unter Berücksichtigung der Pascal-Regel mit binomialen Koeffizienten $\binom{n}{k}$ folgt:

$$\begin{aligned}
 C_{m,q} &= \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \sum_{j=0}^{m+q} \binom{m+q}{j} \cdot u_k^{m+q-j} \cdot (k-i)^j \cdot \delta_t^j \\
 &= \sum_{j=0}^{m+q} \binom{m+q}{j} \cdot u_k^{m+q-j} \cdot \delta_t^j \sum_{i=0}^k (k-i)^j \cdot \lambda^{k-i}
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

[0091] Da es gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{k \rightarrow \infty} (k-i)^j \cdot \lambda^{k-i} &= \sum_{i=0}^{\infty} i^j \cdot \lambda^i = \Lambda_j \left(\frac{-1}{\lambda-1} \right) \\
 \Lambda_j(\dots) &= \prod_1^j \lambda \cdot \frac{d}{d\lambda}(\dots)
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

können die Koeffizienten der Korrelationsmatrix C wie folgt berechnet werden:

$$C_{m,q} = \sum_{j=0}^{m+q} \binom{m+q}{j} \cdot u_k^{m+q-j} \cdot \delta_t^j \cdot \Lambda_j.
 \tag{31}$$

[0092] Dabei wird berücksichtigt, dass die Summe $\sum_{i=0}^k i^j \cdot \lambda^i$ sich auf die multiplen Ableitungen des Grenzwerts der geometrischen Reihe bezieht:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i &= \frac{-1}{\lambda-1} \quad ||\lambda| < 1 \\
 \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i &= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \lambda^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \lambda^i \\
 &= \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{-1}{\lambda-1} \right) \\
 \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \right) &= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \lambda^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot \lambda^i \\
 &= \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{-1}{\lambda-1} \right) \right) \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

[0093] In den obigen Formeln bezeichnen:

$\delta_t = -\delta_u$ die Verschiebung des Fensters des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters; und δ_t^j den zeitlichen Abstand zwischen zwei Messpunkten potenziert mit j.

[0094] Alle Elemente der Korrelationsmatrix C können nach der Gleichung (31) für $k \rightarrow \infty$ vorab berechnet werden. Unter Berücksichtigung der Gleichung (26) kann die konvergierte Kovarianzmatrix \hat{P} ermittelt werden.

[0095] Die berechnete konvergierte Kovarianzmatrix \hat{P} kann als Anfangswert der Kovarianzmatrix \hat{P} für das Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfiler nach dem oben beschriebenen Algorithmus 1 eingesetzt werden. Für die oben beschriebene Form des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters mit konstantem Gain (siehe Algorithmus 2) kann anhand der ermittelten Kovarianzmatrix \hat{P} der Gain K ermittelt werden, z. B. nach der obigen Gleichung (20), Nummer 3.

[0096] Mit der vorgeschlagenen Vorgehensweise kann das Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter (z. B. nach dem Algorithmus 1 oder 2) von einem eingeschwungenen bzw. konvergierten Zustand starten. Dadurch können die aufwendigsten Rechenschritte eines konventionellen Kalman-Filters ausgelassen und das Verfahren beschleunigt werden. Ferner kann das ungewünschte Aufschwingen der Ausgaben zu Beginn der Laufzeit vermieden werden. Die geschätzten Funktionswerte sowie deren Ableitungen können von dem ersten Rechenschritt an genutzt werden, da das Filter nicht mehr konvergieren muss.

[0097] Ferner ist es möglich, die notwendigen Rechenschritte zu reduzieren. So können die notwendigen Rechenschritte beim BRF Filter auf n Multiplikationen und $2n - 1$ Summationen reduziert werden. Ferner ist eine Matrixinvertierung nicht mehr notwendig. Dies bringt erhebliche Geschwindigkeitsvorteile. Des Weiteren ist der notwendige Speicherplatz unabhängig von der Fensterlänge. So ist es erforderlich, eine rechteckige Matrix der Größe $n \times n$ (n = Anzahl der Polynomparameter), eine konstante obere Dreiecksmatrix der Größe $n \times n$ für die Verschiebungsmatrix, die Parameter \hat{x} , zwei Mal den Inputvektor (u) für die Filter und Auswertungsoperationen und den Vergesslichkeitsfaktors λ zu speichern. Zusätzlich wird lediglich ein Daten- bzw. Messpunkt benötigt, um das rekonstruierte Signal neu zu bewerten bzw. zu erneuern. Bis auf die Größen λ , \hat{x} und \hat{P} , welche Gleitkommazahl-Variablen erfordern, können die üblichen Daten als Ganzzahlen gespeichert werden. Der erforderliche Speicherplatz ist somit unabhängig von der Fensterlänge.

[0098] Da eine rekursive Anpassung der Polynomparameter an die Datenpunkte stattfindet, können die Ableitungen des rekonstruierten Signals schnell und ohne Diskretisierungseffekte gebildet werden und z. B. zusammen mit dem rekonstruierten Signal in einem Regelkreis verwendet werden.

[0099] Die Ableitungen können in an sich bekannter Weise, z. B. wie folgt gebildet werden:

1. Ableitung: $((0:1:n - 1) \cdot (0, uEval(1:n - 1))) \cdot x$
2. Ableitung: $((0, 0:1:n - 2) \cdot (0:1:n - 1) \cdot (0, 0, uEval(1:n - 2))) \cdot x$,

wobei „ n “ die Anzahl der Polynomparameter und $(n - 1)$ die Polynomordnung bezeichnet.

[0100] Die vorgeschlagene Form des Kalman-Filters oder des Kalman-Glättungsfilters mit konstantem Gain ist sehr schnell und benötigt wenig Speicherplatz. In einer beispielhaften Ausführung ist diese Form des Kalman-Filters nur wenige Zeilen lang, braucht nur noch 5 bis maximal 10 variable Speicherzellen und rechnet deutlich schneller als Fenster basierte Methoden.

[0101] Fig. 3 zeigt das Block-Diagramm eines beispielhaften PKS Filters. Das verrauschte Messsignal d wird durch eine rekursive Anwendung eines der oben beschriebenen Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter **10** gefiltert oder geglättet, um ein rekonstruiertes Signal \hat{d} zu erhalten. Dabei werden mit jedem neuen Daten- bzw. Messpunkt die Parameter der Polynomfunktion der Ordnung $n - 1$ neu berechnet. Das rekonstruierte Signal \hat{d} kann auf eine Anzeige angezeigt werden oder weiteren Verfahrensabschnitte zur Verfügung gestellt werden. So kann das rekonstruierte Signal und gegebenenfalls die erste und/oder weitere Ableitungen in einem Regelkreis verwendet werden.

[0102] Fig. 4 zeigt das Ablaufdiagramm eines beispielhaften Verfahrens zur Rekonstruktion eines Messsignals. In einer ersten Phase (Initialisierungsphase oder Set-Up Phase) wird ein PKS Filter (z. B. ein PKS Filter nach dem Algorithmus 1 oder 2) in Abhängigkeit der zu erwarteten Signaleigenschaften **20** definiert. Insbesondere werden die Ordnung der Polynomfunktion, der Vergesslichkeitsfaktor, die Fensterlänge und die Verschiebung des Fensters entlang der Zeitachse festgelegt. Ferner wird das PKS Filter wie oben beschrieben initialisiert (Schritt S1: Filtersetup). Die Initialisierung des Filters umfasst das Berechnen einer konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} anhand des Vergesslichkeitsfaktors. Bei dem BRF Filter kann anhand der berechneten Kovarianzmatrix \hat{P} das konstante Gain K berechnet werden. Diese Schritte können vorab und unabhängig von den konkreten Messdaten durchgeführt werden.

[0103] Wenn das Filter bereit ist (Schritt S2), kann dieses rekursiv auf eine Messreihe, d. h. auf eine zeitliche Abfolge von Messdatenpunkten eines Mess- bzw. Sensorsignals **30** angewandt werden (Schritt S3). Dies umfasst eine rekursive Anpassung der Koeffizienten der Polynomfunktion an die Messdaten (Schritt S31) und die Ausgabe der Polynomfunktion mit den angepassten Koeffizienten als das rekonstruierte bzw. gefilterte Signal bzw. Messsignal (Schritt S32). Dabei werden die Koeffizienten der Polynomfunktion mit jedem neuen Messdatenpunkt **40** neu berechnet bzw. angepasst. Das rekonstruierte Messsignal **50** kann einer weiteren Auswertung

und/oder Signalverarbeitung unterzogen werden. Beispielsweise können die erste Ableitung **60** und die zweite Ableitung **70** des rekonstruierten Signals **50** gebildet werden.

[0104] Fig. 5 zeigt das Ablaufdiagramm eines beispielhaften Verfahrens zum Regeln- und/oder Steuern eines Systems **80**. Das Verfahren kann auf eine Vorrichtung ausgeführt werden, die einen Zustandsregler **90** umfasst, welcher das System **80** regelt oder steuert. Die Vorrichtung umfasst ferner ein Messsystem mit einem oder mehreren Sensoren und Mittel, die ein Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter **10** mit einem gleitenden Fenster und einer exponentiellen Gewichtung implementieren (z. B. eines der zuvor beschriebenen Filter). Das von dem Sensor oder Sensoren gemessene Signal (Messsignal) wird, wie oben beschrieben, mittels des rekursiven Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters **10** mit gleitendem Fenster und exponentieller Gewichtung gefiltert oder geglättet. Anhand des gefilterten oder geglätteten Signals **50**, dessen ersten und zweiten Ableitungen **60**, **70** wird ein Zustandsvektor **100** ermittelt, welcher dem Zustandsregler **90** zurückgeführt wird. Der Zustandsregler **90** nimmt ferner als Input einen Vorgabevektor **110** und regelt oder steuert entsprechend das System **80**. Geeignete Regelungs- oder Steuerungsverfahren sind einem Fachmann bekannt.

[0105] Das Regel- oder Steuerverfahren nutzt insbesondere die folgenden Vorteile der vorgeschlagenen Filter:

- Die geringe Rechenzeitanforderung führt zu geringen Latenzzeiten.
- Die Ableitungen, die ohne Diskretisierungseffekte ermittelt werden können, stabilisieren die Regelung als zusätzliche Zustände.

[0106] Fig. 6 zeigt eine beispielhafte Anwendungsanordnung für ein BRF Filter.

[0107] Für ein Simulationsexperiment wird in einem Signalgenerator **120** ein Signal aus der Überlagerung von drei Sinusschwingungen erzeugt (dTrue). Dieses „echte“ Signal wird mit einem Rauschen versehen und auf den Ausgang „data“ gelegt. Das verrauschte Signal stellt ein Messsignal dar. Für die beiden Ausgänge „dTrueDiff1“ und „dTrueDiff2“ werden analytisch die erste und zweite Ableitung des Signals gebildet.

[0108] Dann wird in einem ersten Schritt in einem Signalglättungsmodul **130** („SignalSmootherBRF“) das Signal rekonstruiert. Das Signalglättungsmodul **130** implementiert ein BRF Filter, das im vorliegenden Beispiel im Modus Glättung betrieben wird. Somit weist das rekonstruierte Signal dHat einen Phasenverzug auf im Vergleich zum „echten“ Signal am Eingang „Data“ des Signalglättungsmoduls **130**. Dieser Phasenverzug wird im nächsten Signalverzugsentfernungsmodul **140** („PhasenVerzugBRF“) entfernt, indem der BRF im Modus Prädiktion betrieben wird.

[0109] Aus dem Signalverzugsentfernungsmodul **140** wird das rekonstruierte und phasenkorrigierte Signal dHat an eine Anzeige **160** weiter geleitet. Das rekonstruierte und phasenkorrigierte Signal dHat wird ebenfalls an einen Ableitungsmodul **150** weiter geleitet. Das Ableitungsmodul **150** liefert die erste Ableitung DHatdiff1 des rekonstruierten und phasenkorrigierten Signals. Die erste Ableitung DHatdiff1 wird einem weiteren BRF im Modus Filterung zur Verfügung gestellt. An dessen Ausgängen liegen dann die rekonstruierten Ableitungen diff1 und diff2 des rekonstruierten Signals an, welche von der Anzeige **160** ausgegeben werden. Das Bezugszeichen **170** in Fig. 6 bezeichnet einen Terminator.

[0110] Fig. 7 zeigen die von der Anzeige **160** angezeigten Signale, wobei Fig. 7A das ursprüngliche verrauschte Signal (siehe Linie Signal), Fig. 7B das rekonstruierte und phasenkorrigierte Signal dHat (siehe Linie BRF), Fig. 7C die überlagerten Signale aus Fig. 7A und Fig. 7B, Fig. 7D die erste Ableitung diff1 des rekonstruierten und phasenkorrigierten Signals (siehe Linie BRF_{Diff1}) und Fig. 7E die zweite Ableitung des rekonstruierten und phasenkorrigierten Signals (siehe Linie BRF_{Diff2}) zeigen. Aus Fig. 7 ist ersichtlich, dass das vorgeschlagene Verfahren eine große Genauigkeit aufweist.

[0111] Das rekonstruierte Signal und die Ableitungen können einem Regelkreis zugeführt werden. Zwei Anwendungsbeispiele der beschriebenen Verfahren und Vorrichtungen sind:

- Regelung eines Rotationsdämpfers. Hierbei werden die erste und die zweite Ableitung eines Signals zur Regelung des Rotationsdämpfers benötigt. Diese Signale werden z. B. 2 ms in die Zukunft prädiziert um die Verzögerung der nachfolgenden Rechenschritte zu kompensieren;
- Als Signalfilter verschiedener verrauschter Signale des Can-Bus' eines PKWs. Insbesondere werden die Radgeschwindigkeiten erfasst. Die erste Ableitung des gefilterten Signals wird als Eingabegröße für einen Steigungsschätzer verwendet. Die gefilterte Signale eines Beschleunigungssensors werden als Eingabegröße für einen Steigungsschätzer verwendet und/oder als Regelgröße der Längsdynamikregelung.

[0112] Weitere Anwendungsgebiete (ohne Einschränkung) sind z. B. Navigation, Luft- und Raumfahrt, Telekommunikation, Audio Signal Verarbeitung, Wettervorhersagen, usw.

Verwendete Bezeichnungen

A Addition
 \mathcal{A} , $\hat{\mathcal{A}}$ Verschiebungsmatrix
 C Korrelationsmatrix
 D Fenster bzw. Domain
 \bar{d} Echtes Signal
 d Gewünschtes Signal
 d Daten- bzw. Messpunkt
 d_k Daten- bzw. Messpunkt in dem momentanen Zeitschritt mit Index k
 I Einheitsmatrix
 K Kalman Gain
 k momentaner Zeitschritt
 l Anzahl der Daten- bzw. Messpunkten im Glättungsfenster
 m Reihenindex
 M Multiplikationen
 n Anzahl der polynomischen Koeffizienten
 P, \hat{P} Kovarianzmatrix, geschätzte Kovarianzmatrix
 $\hat{d}(u, \hat{x})$ Polynomfunktion
 q Zeilenindex
 R Messrauschen
 δ_u, δ_u^i Verschiebung
 δ_t Verschiebung in LS
 \mathcal{A}_{δ_u} , \mathcal{A}_{δ_u} Verschiebungsmatrix
 $\mathcal{A}_{\delta_u^i}$, $\mathcal{A}_{\delta_u^i}$ Verschiebungsmatrix
 t Zeit
 U Kontrollinputdomainmatrix
 u Input- bzw. Eingangsvariable
 u_{min} Inputvariable bei der Untergrenze des Fensters bzw. Domains
 u_{eval} Inputvariable beim Evaluierungspunkt
 u_{filter} Inputvektor bei der Obergrenze des Fensters bzw. Domains
 \mathbf{u} Inputvektor
 \mathbf{u}_{min} Inputvektor bei der Untergrenze des Fensters bzw. Domains
 \mathbf{u}_{eval} Inputvektor beim Evaluierungspunkt
 \mathbf{u}_{filter} Inputvektor bei der Obergrenze des Fensters bzw. Domains
 \mathbf{u}_k Kontrollinputvektor
 v Messrauschen
 W Gewichtungsmatrix
 w Gewichtung
 x Zustand
 \hat{x} geschätzter Zustand
 \bar{x} tatsächlicher (true) Parameter
 \mathbf{x} Statusvektor
 $\hat{\mathbf{x}}$ geschätzter Zustandsvektor
 $\bar{\mathbf{x}}$ Vektor der tatsächlichen Parameter
 Λ Multiple Ableitungen Operator
 λ Vergesslichkeitsfaktor

Bezugszeichenliste

10	polynomisches Kalman-Filter oder Kalman-Glättungsfilter (PKS)
20	Signaleigenschaften
30	Mess- bzw. Sensorsignal
40	Messdatenpunkt
50	rekonstruiertes Signal

60	erste Ableitung des rekonstruierten Signals
70	zweite Ableitung des rekonstruierten Signals
80	System
90	Zustandsregler
100	Zustandsvektor
110	Vorgabevektor
120	Signalgenerator
130	Signalglättungsmodul
140	Signalverzugsentfernungsmodul
150	Ableitungsmodul (Differenzierungsmittel)
160	Anzeige
170	Terminator
D	Fenster des polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters
S1	Definieren und Initialisieren des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters
S3	Bereitstellen des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters
S3	Anwendung des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters auf die Messdatenpunkte
S31	Rekursive Anpassung der Koeffizienten der Polynomfunktion
S32	Ausgabe der Polynomfunktion mit den angepassten Koeffizienten als das rekonstruierte bzw. gefilterte Signal bzw. Messsignal

Patentansprüche

1. Verfahren zur Rekonstruktion eines Signals (**50**) aus Messdaten umfassend:
 Erfassen einer zeitlichen Abfolge von Messdatenpunkten (**40**);
 Vorgabe einer Polynomfunktion der Ordnung $n - 1$ und einen Vergesslichkeitsfaktor λ ;
 Bereitstellen eines polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (**10**) mit einem gleitenden Fenster (D) und einer exponentiellen Gewichtung mit dem Vergesslichkeitsfaktor λ ;
 Anpassen der Koeffizienten der Polynomfunktion an die Messdatenpunkte (**40**) mittels rekursiver Anwendung des polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (**10**);
 Ausgabe der Polynomfunktion mit den angepassten Koeffizienten als ein rekonstruiertes Messsignal (**50**);
 wobei das Bereitstellen des polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (**10**) umfasst:
 Bestimmen einer konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} und Initialisieren des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (**10**) anhand der bestimmten konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} ,
 wobei die konvergierte Kovarianzmatrix \hat{P} nach der Gleichung $\hat{P} = C^{-1}$ bestimmt wird, wobei C die Korrelationsmatrix mit den Elementen $C_{m,q}$, $m, q \in \{0, n - 1\}$ bezeichnet, und

$$C_{m,q} = \sum_{j=0}^{m+q} \binom{m+q}{j} \cdot u_k^{m+q-j} \cdot \delta_t^j \cdot \Lambda_j.$$

$$\sum_{i=0}^{k \rightarrow \infty} (k-i)^j \cdot \lambda^{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} i^j \cdot \lambda^i = \Lambda_j \left(\frac{-1}{\lambda - 1} \right)$$

$$\Lambda_j(\dots) = \prod_1^j \lambda \cdot \frac{d}{d\lambda}(\dots)$$

und wobei

$\delta_t = -\delta_u$ die Verschiebung des Fensters des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters bezeichnet; und δ_t^j den zeitlichen Abstand zwischen zwei Messpunkten potenziert mit j bezeichnet.

2. Verfahren nach Anspruch 1, wobei das Gain K des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (**10**) konstant ist und auf Basis der konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} berechnet wird, wobei

$$K_k = \hat{P}'_k \cdot \mathbf{u}_k^\top \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \hat{P}'_k \cdot \mathbf{u}_k^\top + R_k)^{-1}$$

$$\hat{P}_k = \hat{P}, R_k = \lambda \text{ und } k \rightarrow \infty.$$

3. Verfahren nach einem der Ansprüche 1 oder 2, wobei der Vergesslichkeitsfaktor λ im Bereich $0 < \lambda < 1$ liegt; und/oder der Verzug kleiner oder gleich der halben Fensterlänge des gleitenden Fensters ist.

4. Verfahren nach einem der vorangegangenen Ansprüche, ferner umfassend Ermitteln der lokalen Ableitungen der angepassten Polynomfunktion.

5. Verfahren zum Regeln- und/oder Steuern eines Systems (80) umfassend:
Erfassen einer zeitlichen Abfolge von Messdatenpunkten (40);
Rekonstruktion eines Signals (50) aus den erfassten Messdatenpunkten (40) nach dem Verfahren gemäß einem der vorangegangenen Ansprüche;
Regeln und/oder Steuern des Systems (80) anhand des rekonstruierten Signals (50).

6. Computerprogrammprodukt, welches ausgelegt ist, wenn geladen und ausgeführt auf einen Computer, ein Verfahren nach einem der vorangegangenen Ansprüche durchzuführen.

7. Messvorrichtung umfassend:
zumindest einen Sensor zum Erfassen einer zeitlichen Abfolge von Messdatenpunkten (40);
Speichermittel zum Speichern eines Vergesslichkeitsfaktors λ und die Koeffizienten einer Polynomfunktion der Ordnung $n - 1$;
Berechnungsmittel zum Anpassen der Koeffizienten der Polynomfunktion an die Messdatenpunkte mittels rekursiver Anwendung eines polynomischen Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (10) mit einem gleitenden Fenster und einer exponentiellen Gewichtung mit dem Vergesslichkeitsfaktor λ ;
Ausgabemittel zur Ausgabe der Polynomfunktion mit den angepassten Koeffizienten als ein rekonstruiertes Messsignal (50),
wobei die Messvorrichtung ferner umfasst:

Initialisierungsmittel zum Bestimmen einer konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} und zum Initialisieren des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (10) anhand der bestimmten konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} , wobei die Initialisierungsmittel ausgelegt sind, die konvergierte Kovarianzmatrix \hat{P} nach der Gleichung $\hat{P} = C^{-1}$ zu bestimmen, wobei C die Korrelationsmatrix mit den Elementen $C_{m,q}$, $m, q \in \{0, n - 1\}$ ist, und

$$C_{m,q} = \sum_{j=0}^{m+q} \binom{m+q}{j} \cdot u_k^{m+q-j} \cdot \delta_t^j \cdot \Lambda_j.$$

$$\sum_{i=0}^{k \rightarrow \infty} (k-i)^j \cdot \lambda^{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} i^j \cdot \lambda^i = \Lambda_j \left(\frac{-1}{\lambda - 1} \right)$$

$$\Lambda_j(\dots) = \prod_1^j \lambda \cdot \frac{d}{d\lambda}(\dots)$$

und wobei:

$\delta_t = -\delta_u$ die Verschiebung des Fensters des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters bezeichnet; und δ_t^j den zeitlichen Abstand zwischen zwei Messpunkten potenziert mit j bezeichnet.

8. Messvorrichtung nach Anspruch 7, wobei das Gain K des Kalman-Filters oder Kalman-Glättungsfilters (10) konstant ist und auf Basis der konvergierten Kovarianzmatrix \hat{P} berechnet wird, wobei

$$K_k = \hat{P}'_k \cdot u_k^T \cdot (u_k \cdot \hat{P}'_k \cdot u_k^T + R_k)^{-1}$$

$$\hat{P}_k = \hat{P}, R_k = \lambda \text{ und } k \rightarrow \infty.$$

9. Messvorrichtung nach einem der Ansprüche 7 oder 8, wobei der Vergesslichkeitsfaktor λ im Bereich $0 < \lambda < 1$ liegt; und/oder der Verzug kleiner oder gleich der halben Fensterlänge des gleitenden Fensters ist.

10. Messvorrichtung nach einem der Ansprüche 7 bis 9, ferner umfassend Differenzierungsmittel (**150**) zum Berechnen der lokalen Ableitungen der angepassten Polynomfunktion.

11. Vorrichtung zum Regeln- und/oder Steuern eines Systems (**80**) umfassend eine Messvorrichtung gemäß einem der Ansprüche 7 bis 10.

Es folgen 6 Seiten Zeichnungen

Anhängende Zeichnungen

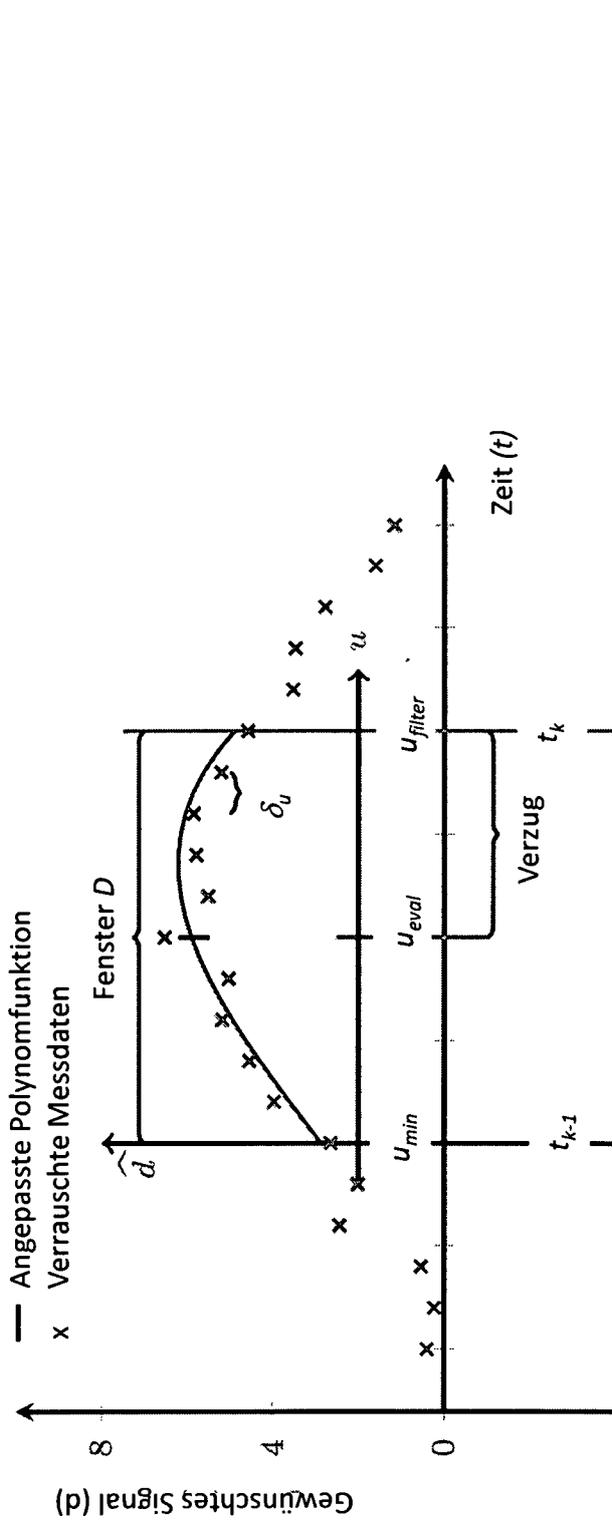


Fig. 1A

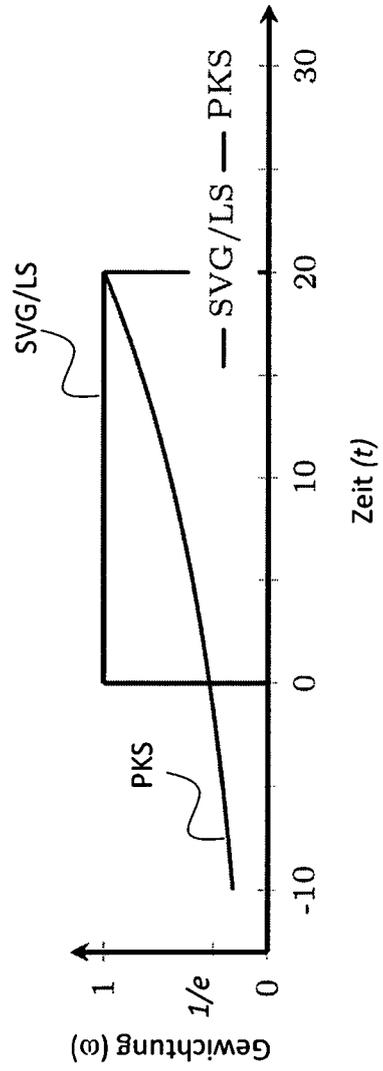


Fig. 1B

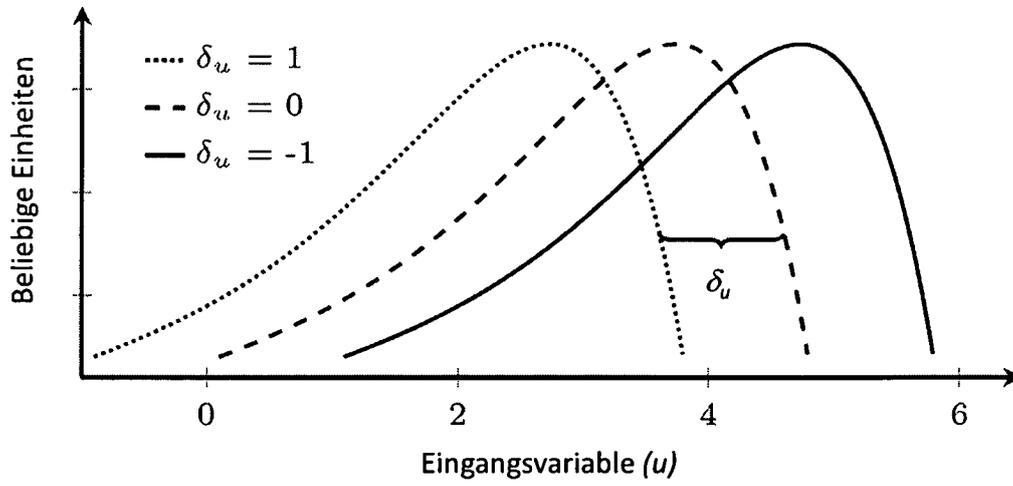


Fig. 2

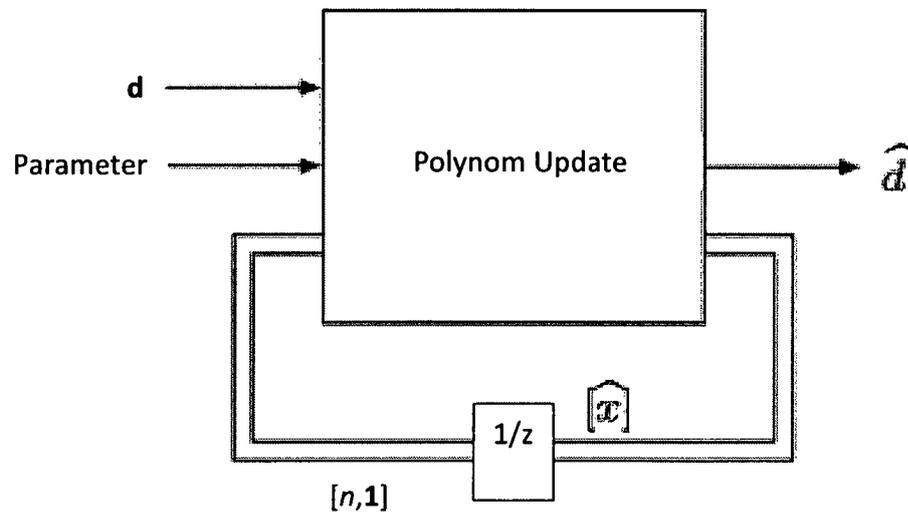


Fig. 3

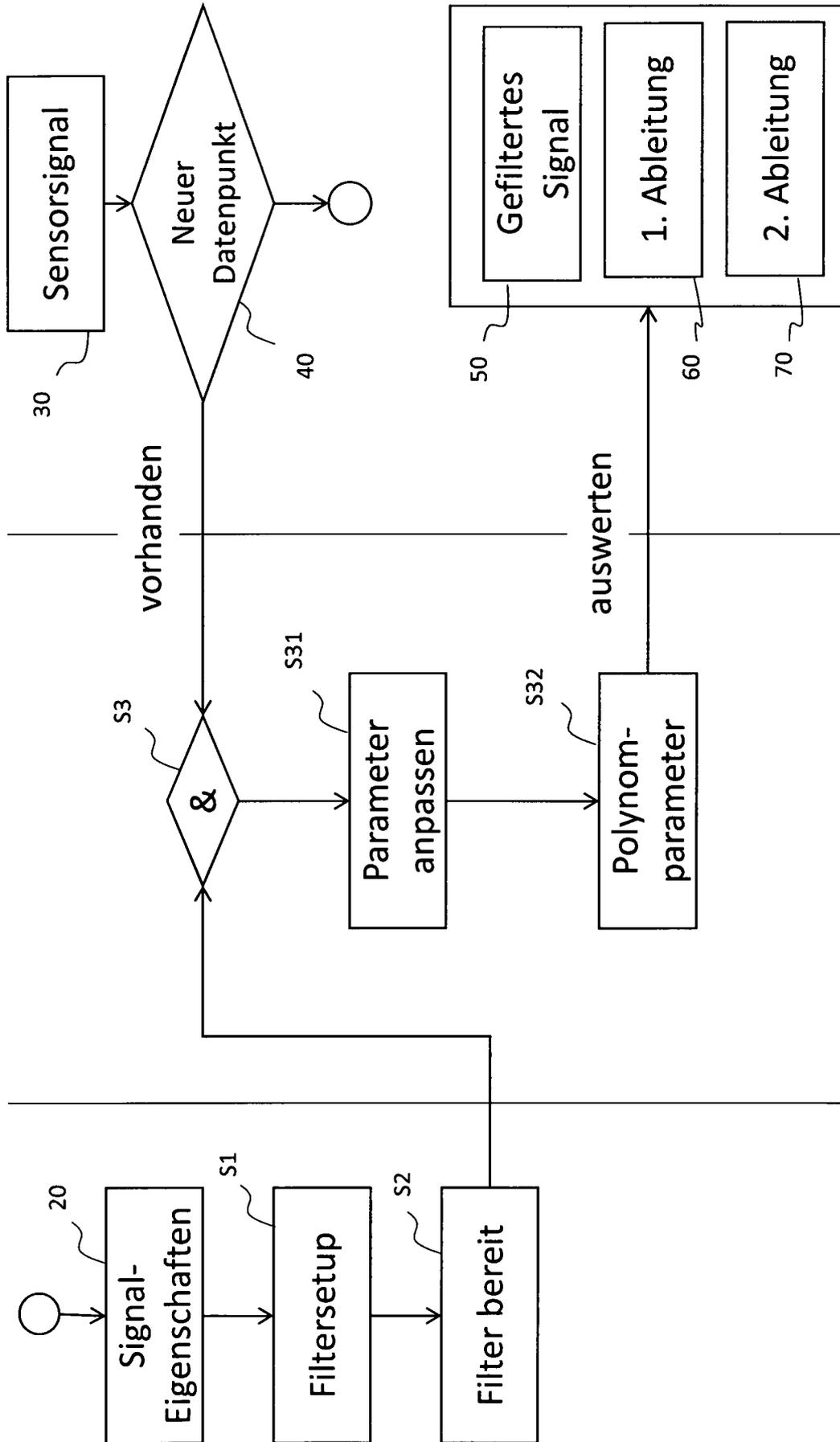


Fig. 4

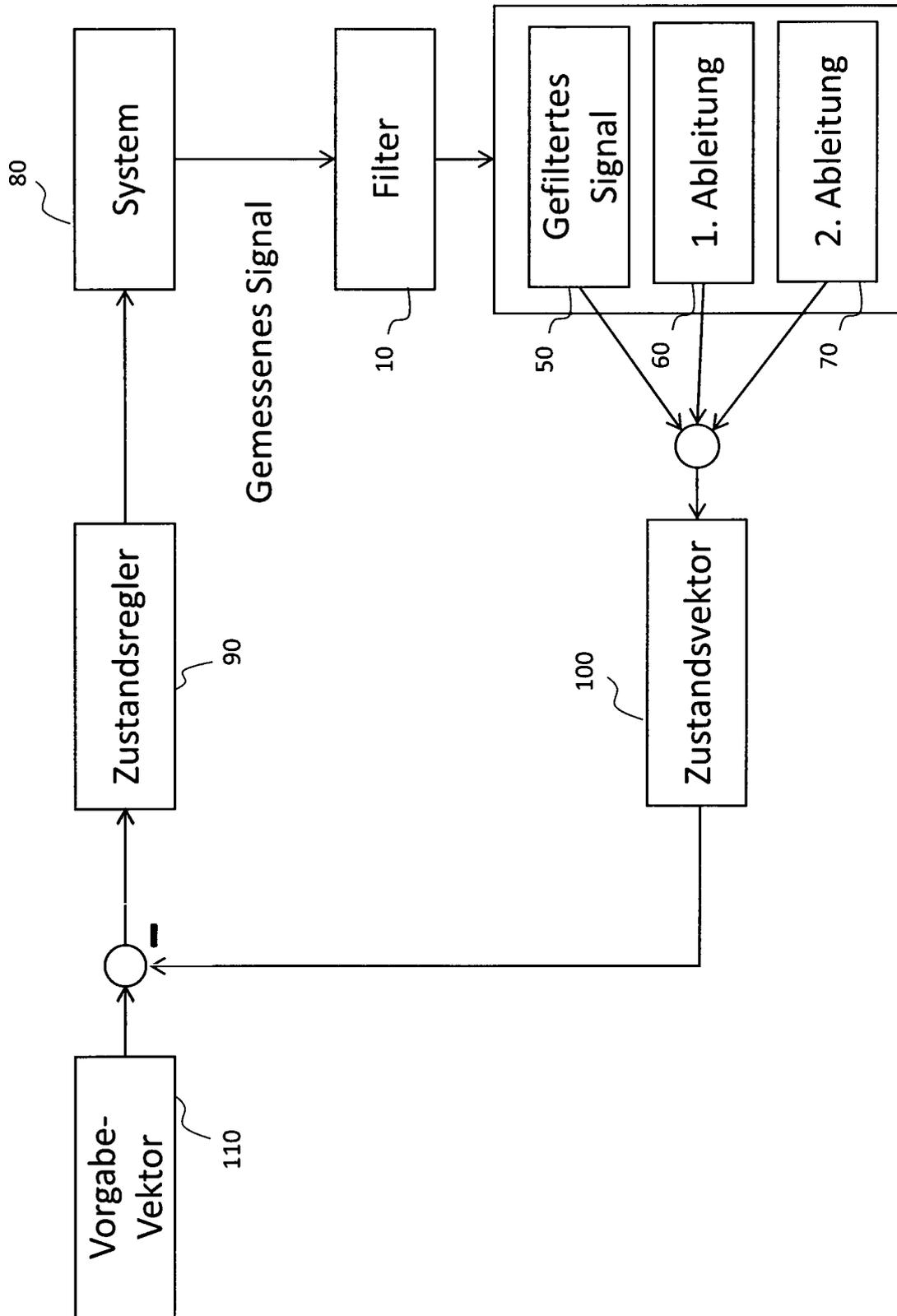


Fig. 5

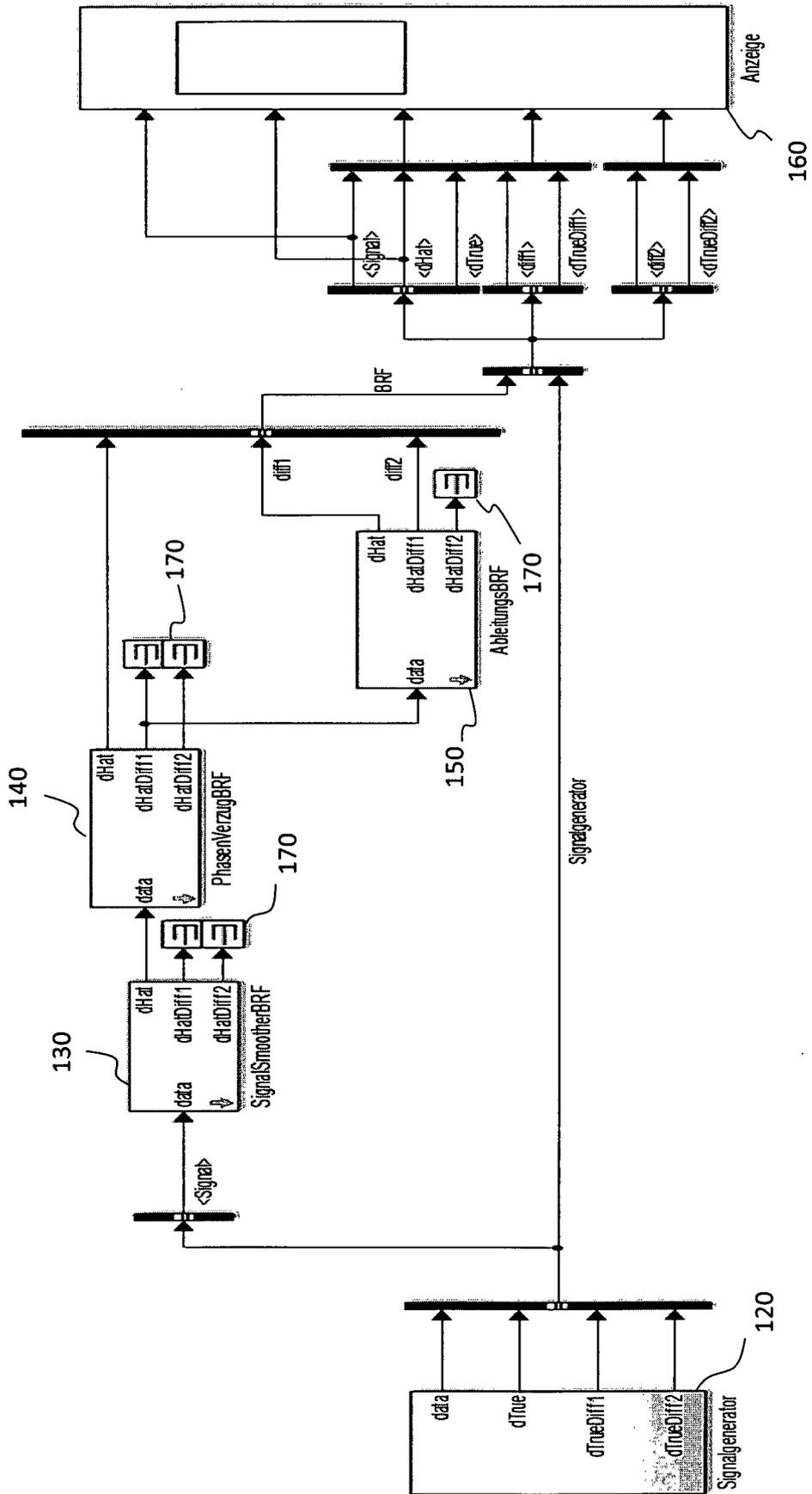


Fig. 6

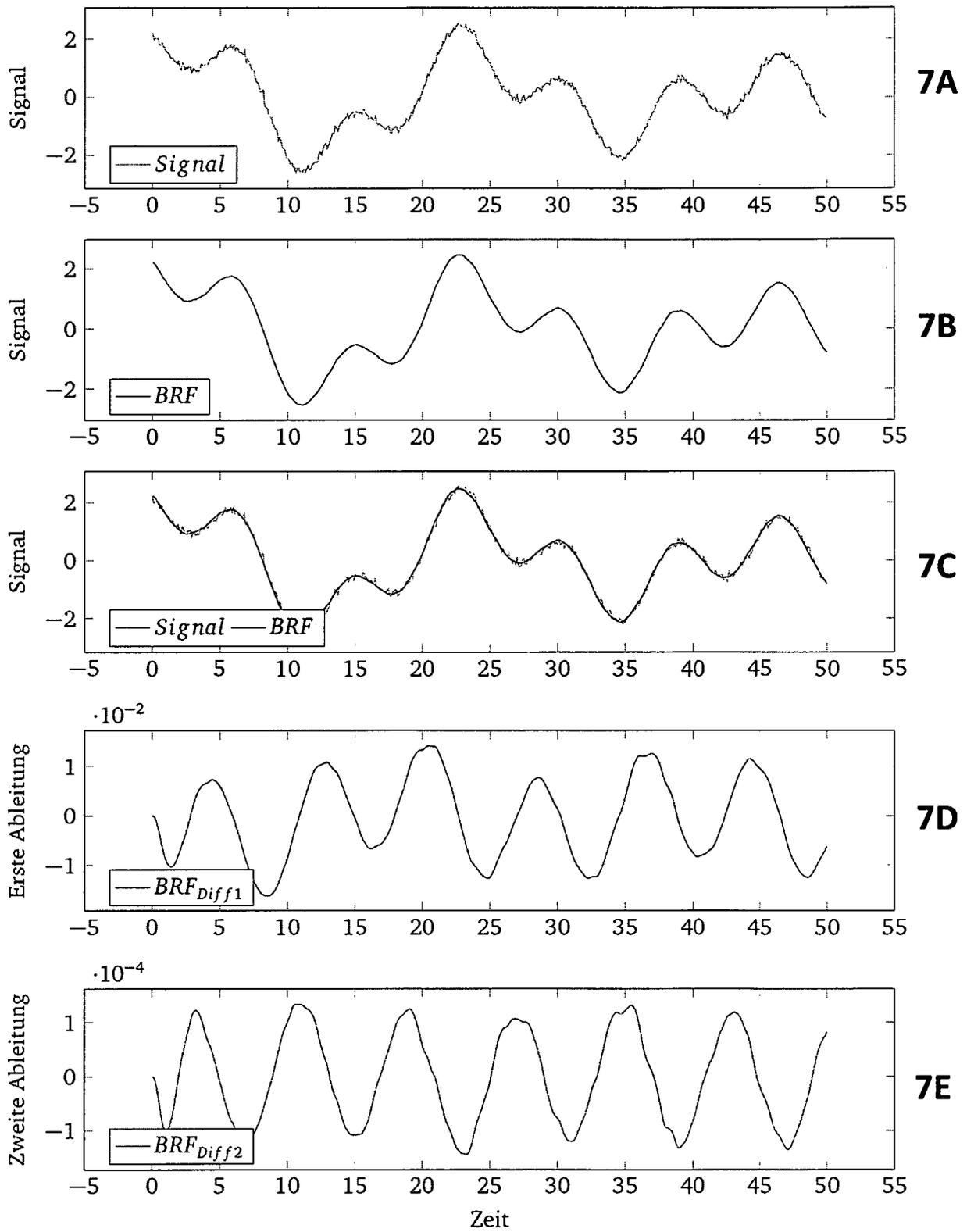


Fig. 7